ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ ខេត្តបាត់ដំបង
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង ១៩ កុម្ភៈ ២០១៣
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២
រយៈពេល ១២០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I- (ពិន្ទុ៥) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$ ។

II- (ពិន្ទុ៥) កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$ គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

III- (ពិន្ទុ១០) គេសង់ស៊ីឡាំងបរិវត្តន៍មួយមានមាឌ $54\ dm^3$ ។ កំណត់វិមាត្រស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យអស់ចំណាយតិចបំផុត ។

IV- (ពិន្ទុ១០) គេមាន $x^2+y^2=1$ ។ កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $S=x+y$ ។

V- (ពិន្ទុ១០) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង a,b,c,d និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។ កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ S ?

VI- (ពិន្ទុ១០) កំណត់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែល $x^2+y^2=2(x+y)+xy$ ។

VII-(ពិន្ទុ១០) គ្រប់ $x\in IR$ គេមាន $f(x)+2f\left(\frac{x+\frac{2011}{2}}{x-1}\right)=4028-x$ ។ គណនា $f(2014)$?

VIII-(ពិន្ទុ១០) ចតុកោណ $ABCD$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $AB=1$, $BC=3$, $CD=2$, $DA=2$ E ជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង BD និង AC ។ រកតម្លៃផលធៀប $\frac{BE}{ED}$?

IX- (ពិន្ទុ១០) គេឲ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $Z_0=1$ និង $Z_{n+1}=Z_n+i$

ក) បង្ហាញថា $|Z_n|<1\ \forall n\in IN\ ,\ n\geq 0$ ។

ខ) តាង $Z_n=x_n+i.y_n$ ដែល $x_n,y_n\in IR$ និង $U_n=Z_n-i$ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង U_n និង U_{n+1} ។

X- (ពិន្ទុ២០) គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R ផ្ចិត O ។ តាង R_1,R_2,R_3 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ OBC, OCA, OAB រៀងគ្នា ។ តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $a+b+c=2p$ ។ ស្រាយថា $\left(\frac{2p}{3}\right)^3\geq abc$ រួចទាញថា $R_1R_2R_3\geq\frac{3^6}{4}\times\frac{R^7}{p^4}$?

អត្រាកំណែគំរូ

I- (ពិន្ទុ៥)   ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$

តាង $P=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}=\prod_{k=1}^{1006}\frac{2k-1}{2k}$

ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ គេមាន $(2k-1)(2k+1)=4k^2-1<4k^2$ នោះ $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{2k-1}{2k}>0$ គេបាន $\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2<\frac{2k-1}{2k+1}$ នោះ $\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$

គេបាន $P=\prod_{k=1}^{1006}\frac{2k-1}{2k}<\prod_{k=1}^{1006}\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\ldots\times\sqrt{\frac{2011}{2013}}=\frac{1}{\sqrt{2013}}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$ ។

II- (ពិន្ទុ៥)   កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$ គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

មាន $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$ (1)

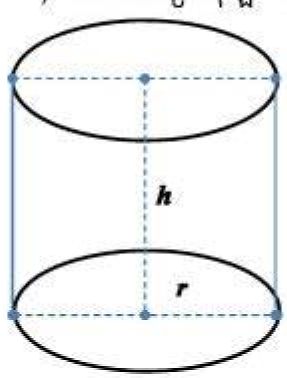
គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គេមាន $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{2}.\frac{(1+\sin x)+(1-\sin xx)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

ឬ $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1}{2}.\frac{\cos x}{1-\sin x}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $a=b=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ ។

III- (ពិន្ទុ១០)កំណត់វិមាត្រស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យអស់ចំណាយតិចបំផុត ៖



តាង r ជាកាំថាសបាត និង h ជាកម្ពស់របស់ស៊ីឡាំង(គិតជា dm)

មាឌរបស់ស៊ីឡាំងគឺ $V=\pi r^2h=54$ នោះ $h=\frac{54}{\pi r^2}$ (1)

ផ្ទៃក្រឡាខាងទាំងអស់នៃស៊ីឡាំងគឺ $S_t=2\pi r^2+2\pi rh$ (2)

យក(1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi \times \frac{54}{\pi r^2} = 2(\pi r^2 + \frac{54}{r^2})$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$\pi r^2 + \frac{54}{r^2} = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{54}{r^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\pi r^2}{2} \times \frac{\pi r^2}{2} \times \frac{54}{r^2}} = 9\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2}}$

គេទាញ $S_t \ge 18\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2}}$ (dm^2) ។ ដើម្បីឲ្យប្រាក់ចំណាយលើការសង់ស៊ីឡាំងនេះអស់តិចបំផុត

លុះត្រាតែ S_t អប្បបរមា នោះវិសមភាពខាងលើក្លាយជាសមភាព ។

គេបាន $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{54}{r^2}$ នាំឲ្យ $r = \sqrt[4]{\frac{108}{\pi}}$ dm ហើយ $h = \frac{54}{\pi\left(\sqrt[4]{\frac{108}{\pi}}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ (dm)

ដូចនេះ $r = \sqrt[4]{\frac{108}{\pi}}$ dm និង $h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ (dm) ។

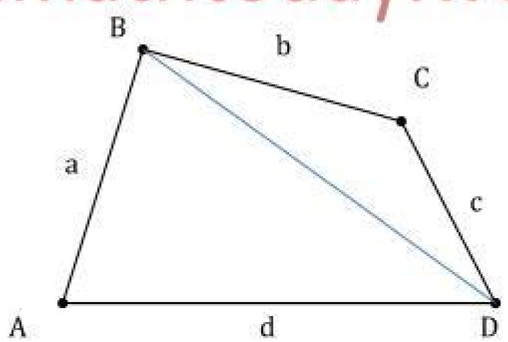
IV- (ពិន្ទុ១០) កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $S = x + y$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេមាន $S^2 = (x+y)^2 \le (1^2+1^2)(x^2+y^2)$

ដោយគេមាន $x^2 + y^2 = 1$ នោះ $S^2 \le 2$ សមមូល $-\sqrt{2} \le S \le \sqrt{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃនៃ S គឺ $S_{\min} = -\sqrt{2}$ និងតម្លៃធំបំផុតគឺ $S_{\max} = \sqrt{2}$ ។

V- (ពិន្ទុ១០) កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ S



គេមាន $S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C$ នោះ $ad\sin A + bc\sin C = 2S$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABD និង BCD គេមាន ៖

$AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bccosC$

នោះ $ad\cos A - bc\cos C = \frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2}$ (2)

គេមាន $(ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(A+C)$

ដោយ $\cos(A+C) = 2\cos^2\frac{A+C}{2} - 1$

គេបាន $(ad\sin A+bc\sin C)^2+(ad\cos A-bc\cos C)^2=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេបាន $4S^2+\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4}=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$

គេទាញ $S=\sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{4}-\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$ (*)

តាម (*) ដើម្បីឲ្យ S អតិបរមាលុះត្រាតែ $\cos^2\frac{A+C}{2}=0$ នោះ $\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}$ ឬ $A+C=\pi$

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនៃចតុកោណជាអនុគមន៍នៃជ្រុង a,b,c,d គឺ ៖

$S_{\max}=\sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{4}-\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}}$ ។

VI- (ពិន្ទុ១០) កំណត់គូចំនួនគត់ (x,y)

សមីការ $x^2+y^2=2(x+y)+xy$ អាចសរសេរ $(x+y)^2-2xy=2(x+y)+xy$

សមមូល $(x+y)^2-2(x+y)+1=3xy+1$

សមមូល $(x+y-1)^2=3xy+1$ (1)

-បើ $x=0$ នោះសមីការ (1) ក្លាយជា $(y-1)^2=1$ សមមូល $y(y-2)=0$

គេទាញ $y=0$, $y=2$ ។ ដោយ (1) ជាសមីកាស៊ីមេទ្រី(ឆ្លុះ)នោះគេទាញបានគូចម្លើយ ៖

$(x,y)\in\{(0,0),(0,2),(2,0)\}$ ។

-បើ $x\neq 0$ ឬ $y\neq 0$ នោះដើម្បីឲ្យ (1) មានចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនគត់លុះត្រាតែ $3xy+1$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ព្រោះអង្គទីមួយនៃសមីការជាការេប្រាកដ ។

តាង $m\in IN$ ដែល $3xy+1=m^2$ នោះ $xy=\frac{m^2-1}{3}=\frac{(m-1)(m+1)}{3}$ ដោយ $xy\in IN$

នោះគេត្រូវឲ្យ $3|(m-1)$ ឬ $3|m+1$ ។

-ករណី $3|m-1$ នោះ $m=3k+1\ \forall k\in IN$

គេបាន $\begin{cases}(x+y-1)^2=(3k+1)^2\\ xy=k(3k+2)\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x+y=3k+2\\ xy=k(3k+2)\end{cases}$ នោះ x និង y ជាឫសសមីការ

$t^2-(3k+2)t+k(3k+2)=0\ (E_1)$, $\Delta=(3k+2)^2-4k(3k+2)$

$\Delta=(3k+2)(2-k)$ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ $\Delta=(3k+2)(2-k)\geq 0$ ដោយ $k\in IN$

នោះគេទាញបាន $k=1$ ឬ $k=2$ ។

ចំពោះ $k=1$ នោះ$\Delta=5$មិនមែនជាការេប្រាកដនោះសមីការគ្មានឫសគត់។

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $t_1=t_2=\frac{3k+2}{2}=\frac{3(2)+2}{2}=4$

ដូចនេះ $x=4$, $y=4$ ។

-ករណី $3|m+1$ នោះ $m=3k-1\ \forall k\in\mathbb{N}$

គេបាន $\begin{cases}(x+y-1)^2=(3k-1)^2\\ xy=k(3k-2)\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x+y=3k\\ xy=3k(3k-2)\end{cases}$ នោះ x និង y ជាឫសសមីការ

$t^2-3kt+k(3k-2)=0\ (E_1)$, $\Delta=9k^2-4k(3k-2)$

$\Delta=k(8-3k)$ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ $\Delta=k(8-3k)\geq 0$ ដោយ $k\in\mathbb{N}$ នោះគេទាញ

បាន $k=1$ ឬ $k=2$ ។

ចំពោះ $k=1$ នោះ $\Delta=5$ មិនមែនជាការេប្រាកដនោះសមីការគ្មានឫសគត់។

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\Delta=4$ គេទាញឫស $t_1=2$, $t_2=4$ ។

ដូចនេះ $x=2$, $y=4$ ឬ $x=4$, $y=2$ ។

សរុបមកសមីការមានគូចម្លើយ៦គូគឺ ៖

$(x,y)\in\{(0,0),(0,2),(2,0),(4,2),(2,4),(4,4)\}$ ។

VII-(ពិន្ទុ១០) គណនា $f(2014)$

គេមាន $f(x)+2f\left(\dfrac{x+\frac{2011}{2}}{x-1}\right)=4028-x\quad(1)$

យក $x=2014$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(2014)+2f\left(\dfrac{2014+\frac{2011}{2}}{2013}\right)=4028-2014$

សមមូល $f(2014)+2f(\frac{3}{2})=2014\ (2)$

យក $x=\frac{3}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(\frac{3}{2})+2f\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{2011}{2}}{\frac{3}{2}-1}\right)=4028-\frac{3}{2}$

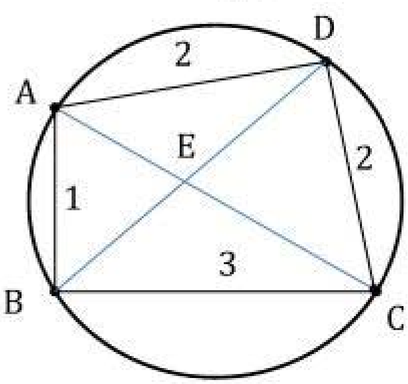
សមមូល $f(\frac{3}{2})+2f(2014)=\frac{8053}{2}$ នោះ $f(\frac{3}{2})=\frac{8053}{2}-2f(2014)\ (3)$

យក (3) ជួសក្នុង (2) គេបាន $f(2014)+8053-4f(2014)=2014$

$$-3f(2014)=-6039$$

ដូចនេះ $f(2014)=\dfrac{-6039}{-3}=2013$ ។

VIII-(ពិន្ទុ១០) រកតម្លៃផលធៀប $\dfrac{BE}{ED}$



-ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EAD និងត្រីកោណ EBC :

មាន $\angle AED = \angle BEC$ (មុំទល់កំពូល) និង $\angle EAD = \angle EBC$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\overset{\frown}{DC}$)

នោះ EAD និង EBC ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{2}{3}$ នោះ $\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{3}{2}$ **(1)** និង $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{2}{3}$ **(2)**

-ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EAB និងត្រីកោណ EDC :

មាន $\angle AEB = \angle DEC$ (មុំទល់កំពូល) និង $\angle ABE = \angle ECD$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\overset{\frown}{AD}$)

នោះ EAB និង EDC ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{DC} = \dfrac{1}{2}$ នោះ $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{1}{2}$ **(3)** និង $\dfrac{EC}{EB} = 2$ **(4)**

បូកសមីការ (1) និង (3) គេបាន $\dfrac{EA+EC}{ED} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$ ឬ $\dfrac{AC}{ED} = 2$ **(5)**

បូកសមីការ (2) និង (4) $\dfrac{EA+EC}{EB} = \dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{8}{3}$ ឬ $\dfrac{AC}{EB} = \dfrac{8}{3}$ **(6)**

ចែកសមីការ (5) និង (6) គេបាន $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ ។ ដូចនេះ $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{3}{4}$ ។

IX- (ពិន្ទុ១០) ក) បង្ហាញថា $|Z_n| < 1 \ \forall n \in IN , n \geq 0$

គេមាន $Z_0 = 1$ និង $Z_{n+1} = Z_n + i$

គេទាញ (Z_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនៃចំនួនកុំផ្លិចមានផលសងរួម $d = i$

គេបាន $Z_n = Z_0 + nd = 1 + ni$ នោះ $|Z_n| = \sqrt{1+n^2} \geq 1$ គ្រប់ $n \in IN$ និង $n \geq 0$

ដូចនេះ $|Z_n| \geq 1$ ។ (សំនួរខ្ញុំគិតថាប្រធានលំហាត់ប្រហែលខុស)

ខ) កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង U_n និង U_{n+1}

គេមាន $U_n = Z_n - i$ នោះ $U_{n+1} = Z_{n+1} - i = Z_n + i - i = (Z_n - i) + i = U_n + i$

ដូចនេះ $U_{n+1} = U_n + i$ ជាទំនាក់ទំនងត្រូវរក ។

X- (ពិន្ទុ២០) ស្រាយថា $\left(\dfrac{2p}{3}\right)^3 \geq abc$ រួចទាញថា $R_1 R_2 R_3 \geq \dfrac{3^6}{4} \times \dfrac{R^7}{p^4}$